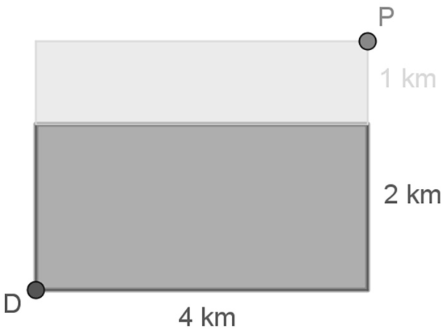
Optymalizacje z *GeoGebrą*

Czasami wystarczy mała dygresja albo odpowiednio dobrane lub zmodyfikowane zadanie, aby na chwilę przywołać miłe wspomnienia i zobaczyć uśmiechy na twarzach. Dlatego też postanowiłam przedstawić dziś zadanie tego typu. W połączeniu z użyciem *GeoGebry* rozwiązanie może być dobrym pomysłem na początek roku szkolnego. Może być w pełni wykorzystane w klasach licealnych, ponieważ będzie ono dotyczyło optymalizacji. Sama „zabawa" problemem, przewidywanie poprawnego wyniku i praca z *GeoGebrą* mogą dać cenne doświadczenia zarówno na lekcji, jak i na zajęciach dodatkowych lub na kole przedmiotowym.

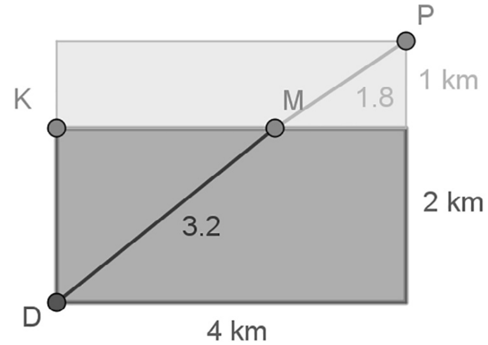
Zadanie, którym dzisiaj się zajmę, ma wiele wersji. Możemy je dopasować do własnych potrzeb, „opowiadając" swoją historię. Założyłam, że mamy pozostać w wakacyjnym klimacie, więc moja wersja zadania brzmi następująco:

> Turysta chce przejść z domu wczasowego (punkt D) do punktu widokowego (punkt P). Obszar, po którym może się poruszać w linii prostej w dowolnym kierunku, to częściowo łąka, a częściowo plaża (jak na rysunku 1). Zakładamy, że średnia prędkość przemieszczania się po trawie wynosi 5 km/h, a po piachu 3 km/h. Jaką drogę powinien wybrać turysta, aby dostać się tam najszybciej?



Ryc. 1.

Aby przygotować funkcjonalny plik, możemy pracować początkowo na obszarze roboczym z wyświetloną siatką. Dzięki temu punkty wykorzystane do konstrukcji mogą być punktami kratowymi, które osadzimy, co uniemożliwi ich przemieszczanie. Potem możliwe będzie jednak poruszanie nimi, gdybyśmy chcieli zmienić warunki zadania albo rozważyć inne przypadki. Dlatego też polecam tworzenie zawsze jak najbardziej wszechstronnych i uniwersalnych plików. Po wybraniu punktów konstrukcyjnych zmieniamy odpowiednio ich nazwy oraz osadzamy wybrane obiekty (punkty *D, P, K*) – na przykład za pomocą przycisku w menu **Widoku Grafiki,** a także ukrywamy niepotrzebne już proste i odcinki. Jeśli chcemy zapewnić sobie uniwersalność przygotowywanej ilustracji, musimy pamiętać, aby punkt wyznaczający granicę pomiędzy trawą i piachem (punkt *K*) był punktem leżącym na odcinku – boku prostokąta reprezentującym cały obszar. W celu zwizualizowania opisanej sytuacji wprowadzamy dodatkowo dwa osobne prostokąty i odpowiednio je kolorujemy. Będziemy potrzebować także punktu na granicy obszarów (punkt *M*) – i to również musi być punkt leżący na odcinku. Możemy wówczas wprowadzić odcinki reprezentujące drogę przejścia i wyświetlić w ich właściwościach wartości – długości odcinków (ryc. 2).



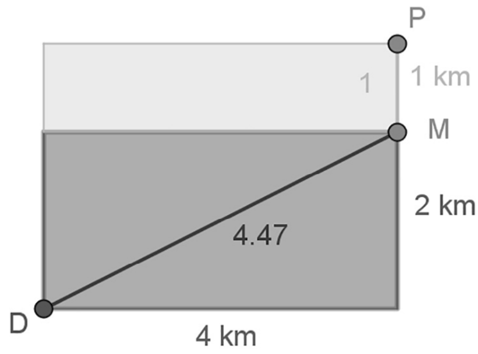
Ryc. 2.

	A	B	C	D	E
1					
2		prędkość	droga	czas	
3	TRAWA	5	2.36	0.47	
4	PIACH	3	2.92	0.97	
5		km/godz	km	godz	
6					
7					
8			Łączny czas:	1.45	godz
9					

Ryc. 3.

Po takim przygotowaniu pliku możemy przystąpić do pomiarów i obliczeń. Mogą być one wykonywane w obszarze roboczym zarówno **Widoku Grafiki**, jak i **Widoku Arkusza**, który możemy dodatkowo wyświetlić. Pozwoli to nam na szybkie wykonanie przejrzystej tabeli i ułatwi prowadzenie obserwacji. Aby przenieść wielkości mówiące o tym, jaki dystans turysta przeszedł po każdym terenie, wystarczy w wybranej komórce arkusza wpisać literowe oznaczenia odcinków, jakie im odpowiadają na rysunku. Jeśli chcemy wykonać obliczenia mówiące o czasie przejścia, możemy wykorzystać proste formuły, powszechnie znane z arkuszy kalkulacyjnych. Na przykład w komórce D3 wpisujemy: = *C3/B3*, a w komórce D8: = *D3* + *D4* (ryc. 3).

Po tak przygotowanym pliku pozostaje nam już tylko bezpośrednia praca nad poszukiwaniem rozwiązania. Oczywiście, w międzyczasie możemy dodatkowo zaproponować uczniom poszukiwanie odpowiedzi na kilka innych pytań. Warto bowiem zastanowić się na przykład, jak będzie wyglądał czas przejścia turysty idącego najkrótszą drogą (w linii prostej z punktu *D* do punktu *P* – 5 km). Taką drogę często wybieramy w praktyce, nie analizując zaistniałej sytuacji. Możemy też rozważyć inne przypadki szczególne, kiedy turysta będzie poruszał się tak, aby po trawie przejść tylko 2 km (pionowo do góry) i dowolnie po piachu oraz odwrotnie – dowolnie po trawie, a po piachu jedynie 1 km (ryc. 4). Każdy z nas może, oczywiście, dodać swoje pomysły na dodatkowe zagadnienia.



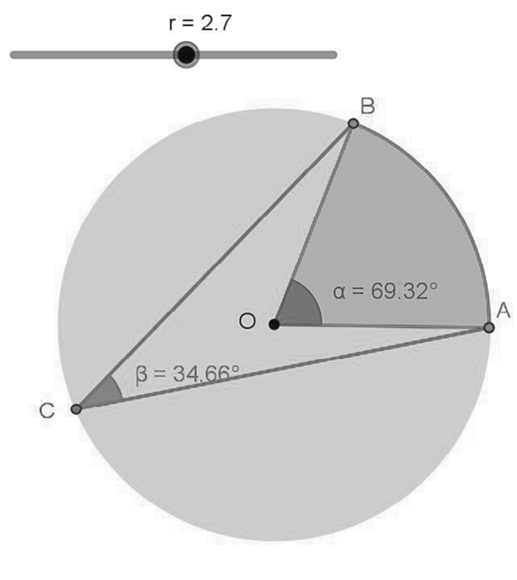
Ryc. 4.

Wracając jednak do problemu samej optymalizacji... Zadanie to może okazać się ciekawe nie tylko dla uczniów znających pojęcie pochodnej. Każdy uważny obserwator, zmieniając położenie punktu M, będzie w stanie dostrzec, że optymalna droga dla turysty to taka, która przez ok. 3,96 km prowadzi przez łąkę, a następnie przez ok. 1,16 km przez plażę. Żeby zwiększyć dokładność uzyskanego wyniku, możemy wyświetlić liczby z większą dokładnością – w **Menu głównym** programu w zakładce **Opcje** mamy możliwość wskazania liczby miejsc po przecinku, jaka zostanie wyświetlona (ryc. 5).

Wprowadzanie pojęć z *GeoGebrą*

Na każdym etapie edukacyjnym, praktycznie w każdym roku nauki, znajdziemy wiele momentów, w których naszym zadaniem jest wprowadzenie nowych dla uczniów pojęć i definicji.

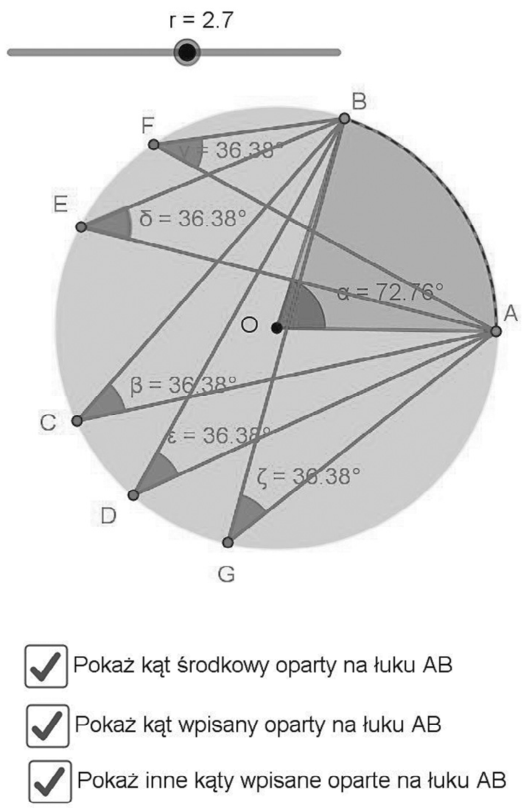
W zależności od tego, czy jest to szkoła podstawowa, czy też średnia, pojęcia te różnią się trudnością, złożonością czy też poziomem abstrakcji. Jednak zawsze nowe pojęcie może przysporzyć trudności naszym podopiecznym. Dlatego warto podjąć wysiłek i przygotować wcześniej odpowiednią wizualizację, która ułatwi uczniom zrozumienie. Poza tym, wiele pojęć kształtuje się latami, poprzez kilka etapów edukacyjnych. Zatem niektóre rysunki interaktywne mogą być przydatne w wielu momentach, bez przypisywania ich do konkretnego typu szkoły – albo do samego wprowadzenia pojęcia, albo do powtórzenia znanych już uczniom faktów, uzupełnienia i kontynuowania ich omawiania. Przykładem może być plik, który obrazuje kąty w kole oraz zależności pomiędzy ich miarami. Pojęcia te pojawiają się już w szkole gimnazjalnej (kąty środkowe wprowadzane są przy okazji omawiania długości okręgu i łuku oraz pola koła i wycinka kołowego). Jednak podstawa programowa nie narzuca obowiązku omawiania na tym etapie dodatkowych pojęć i własności. Pojawiają się one za to na etapie szkoły ponadgimnazjalnej, na poziomie podstawowym. Przygotowanie kompletnej ilustracji możemy zacząć od wprowadzenia **suwaka** ***r***, który będzie określał długość promienia koła. Rysując go, wystarczy skorzystać z narzędzia **Okrąg o danym środku i promieniu** . Przy tej okazji warto też zastanowić się razem z uczniami nad tym o jakich kątach mówimy – w kole czy okręgu, gdyż te pojęcia często są używane zamiennie. Dobrze jest zadbać, aby nasi uczniowie mieli świadomość, które stwierdzenie jest bardziej właściwe. Aby zaakcentować na rysunku fakt, że chodzi nam o koło, możemy powiększyć poziom przezroczystości we właściwościach okręgu. Po wybraniu dwóch punktów na okręgu możemy także zaznaczyć **wycinek koła** , dzięki czemu również kąt środkowy, który następnie zaznaczymy, będzie bardziej widoczny, zaciemniony. Wykonana przez nas ilustracja nie może pokazywać błędów, zwłaszcza po zmianie położenia obiektów początkowych. Dlatego też, aby poprawnie zaznaczyć kąt wpisany, jako jego wierzchołek musimy wybrać punkt leżący na łuku uzupełniającym łuk, na którym oparty jest istniejący już kąt środkowy. Powinniśmy więc najpierw wprowadzić ten łuk (o danym środku przechodzącym przez dwa punkty ). Żeby mieć pewność, że uzyskamy właściwy łuk, należy zwrócić uwagę na kolejność wskazywania na okręgu punktów, które go wyznaczają. Na tak otrzymanym łuku możemy zaznaczyć punkt, a następnie wskazać kąt wpisany. Jeżeli odpowiednio dopasujemy kolorystykę w formatowaniu obiektów, rysunek będzie bardziej czytelny.



Ryc. 1. Kąt środkowy i kąt wpisany oparte na tym samym łuku

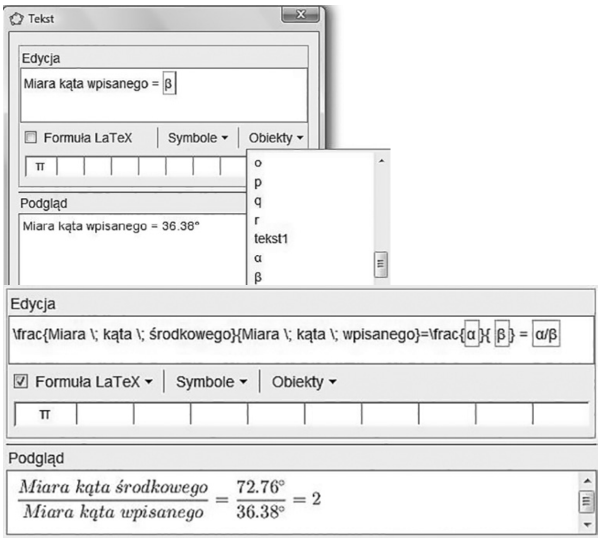
W podobny sposób możemy zaznaczyć inne kąty wpisane oparte na tym samym łuku, a następnie wykonać przyciski, które będą pozwalały na pokazywanie i ukrywanie obiektów. Mogą to być np. przyciski dla kąta środkowego, kąta wpisanego i pozostałych kątów wpisanych.

Tak przygotowany rysunek może pomóc uczniom w odkryciu własności kątów wpisanych opartych na tym samym łuku. Aby ułatwić im obserwacje dotyczące związku pomiędzy miarą kątów wpisanego i środkowego, opartych na tym samym łuku, możemy wprowadzić dodatkowe opisy, komentarze i obliczenia (które również mogą pojawiać się po naciśnięciu stworzonego przez nas przycisku). Wyświetlany tekst może zawierać zarówno miary kątów, jak i wyliczony stosunek ich miar. Przypomnę, że aby łączyć tekst dynamiczny ze statycznym, po wpisaniu komentarza w odpowiednim miejscu należy umieścić odnośnik do obiektu, który nas interesuje. Natomiast w celu wyświetlenia ułamków musimy użyć odpowiedniej formuły *LaTeX*.



Ryc. 2. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary

Tak przygotowany rysunek może okazać się przydatny zarówno w starszych klasach szkoły podstawowej (możemy dołączyć do niego wzory na pole koła, pole wycinka, długość okręgu i długość łuku), jak i w szkole średniej. Może on być wykorzystany jako przypomnienie i wprowadzenie do dalszych obserwacji. Zmieniając położenie punktów na okręgu, możemy łatwo uzyskać kąt wpisany oparty na półokręgu – kąt prosty i odpowiadający mu kąt środkowy, półpełny.



Ryc. 3. Opis przygotowany przy wykorzystaniu formuły *LaTeX*

Nieco odmienny sposób wprowadzania pojęcia umożliwi nam kolejny z omówionych przykładów, a dotyczący konkretnie pojęcia jednokładności. W podobny sposób możemy uzyskać rysunki ilustrujące inne przekształcenia płaszczyzny. Wybrałam jednak jednokładność ze względu na poziom złożoności konstrukcji.

Na początek musimy przygotować gotowy rysunek (w **Widoku Grafiki**) i opis konstrukcji (w **Widoku Grafiki 2**). Możemy w tym celu wprowadzić **suwak *s*** i **punkty *O*** i ***A*** oraz skorzystać z narzędzia **Jednokładność** i dopiero na końcu zaznaczyć wektory.

SPIS TREŚCI

Nota autorska 4

GeoGebra analitycznie 5

Optymalizacje z *GeoGebrą*. 9

O optymalizacji raz jeszcze 13

Wprowadzanie pojęć z *GeoGebrą*. 17

Trygonometria z *GeoGebrą* 21

Trygonometria w zadaniach 25

Geometria na poziomie... 29

Równania i nierówności z wartością bezwzględną 33

Geo i nie tylko Gebra 37

Pomaturalne refleksje z *GeoGebrą* 41

Wzajemne położenie okręgów w *GeoGebrze* 45

W krainie funkcji liniowej 49

Długość odcinka w *GeoGebrze* 53