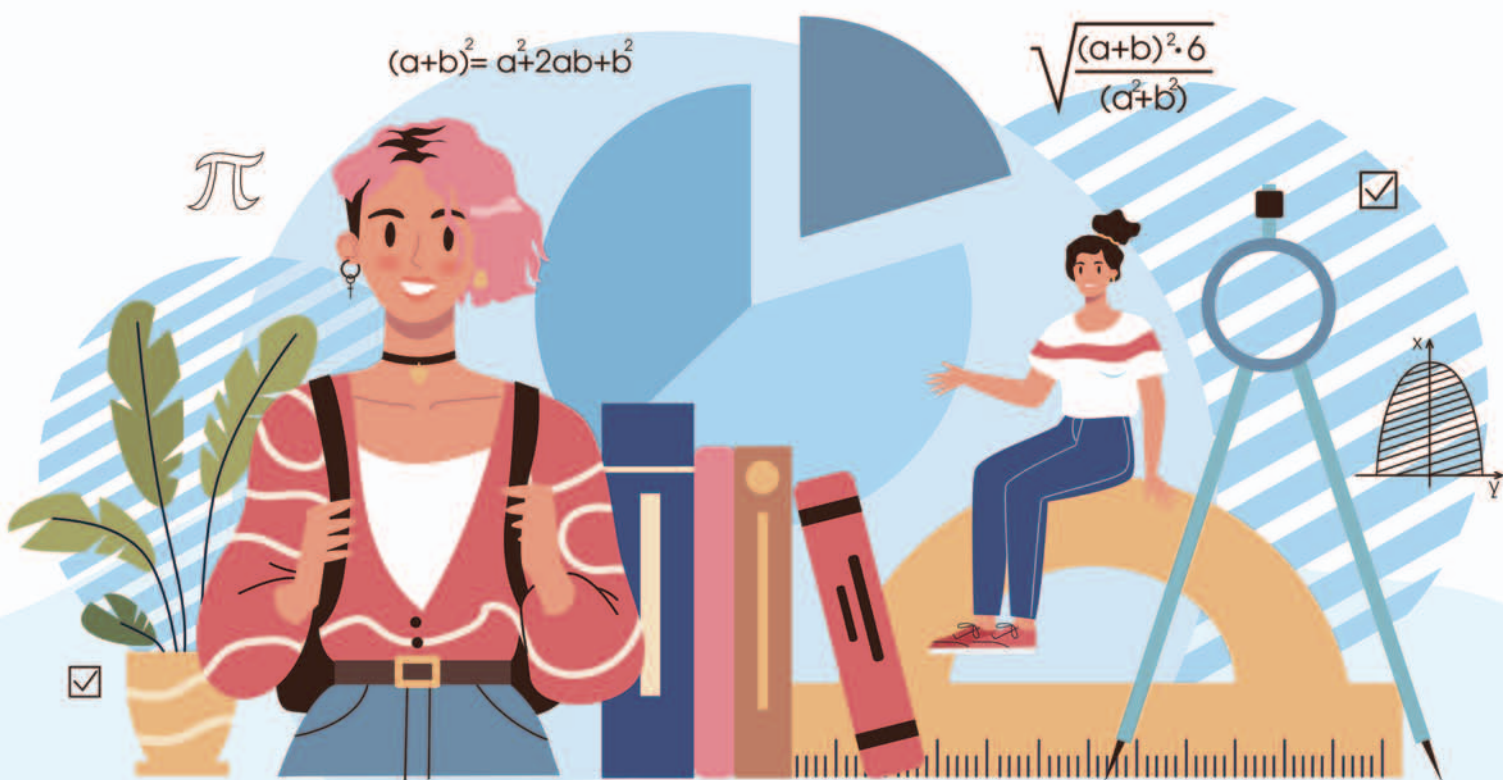


# Matematyka – lubię to!

Zadania dla  
starszych klas liceów



# Spis treści

## Zadania dla starszych klas liceów

### Zestaw 1

Zadania 5

Rozwiązania 6

### Zestaw 2

Zadania 7

Rozwiązania 8

### Zestaw 3

Zadania 9

Rozwiązania 10

### Zestaw 4

Zadania 11

Rozwiązania 12

### Zestaw 5

Zadania 13

Rozwiązania 14

### Zestaw 6

Zadania 15

Rozwiązania 16

### Zestaw 7

Zadania 17

Rozwiązania 18

### Zestaw 8

Zadania 19

Rozwiązania 20

### Zestaw 9

Zadania 21

Rozwiązania 23

### Zestaw 10

Zadania 24

Rozwiązania 25

### Zestaw 11. KONKURS MINIMUM I MAKSIMUM

Zadania 26

Rozwiązania 27

### Zestaw 12

Zadania 28

Rozwiązania 29

### Zestaw 13

Zadania 30

Rozwiązania 31

### Zestaw 14

Zadania 32

Rozwiązania 33

## Zestaw 1

**Zadanie 1** Liczba  $m$  jest ustaloną liczbą całkowitą. Wyznaczyć wszystkie rosnące ciągi arytmetyczne  $(a, b, c, d)$  o wyrazach wymiernych i takie, że  $\cos(a + b) = \log(c + d) = m$ .

**Zadanie 2** Podać przykład nadzbioru właściwego zbioru liczb wymiernych dodatnich, który jest jednocześnie podzbiorem właściwym zbioru liczb rzeczywistych dodatnich i który z działaniem mnożenia stanowi grupę. Podać nieskończenie wiele takich przykładów.

**Zadanie 3** Podać przykład funkcji  $f$  odwzorowującej  $R$  w  $R$  i rozłącznych zbiorów  $A$  i  $B$  takich, że  $A$  jest nieskończonym i ograniczonym przedziałem obustronnie otwartym,  $B$  jest nieskończonym i ograniczonym przedziałem obustronnie domkniętym oraz zbiorem rozwiązań nierówności  $f(x) < x$  jest zbiór  $A$ , natomiast zbiorem rozwiązań nierówności  $f(x) < 2x$  jest zbiór  $B$ .

**Zadanie 4** Niech  $[x]$  oznacza cechę  $x$ . Liczba  $n$  jest ustaloną liczbą naturalną większą od 4. Podać przykład liczb wymiernych  $a$  i  $b$  spełniających układ warunków:

$$|a + b| > n$$

$$\log(ab) = [a + b]$$

**Zadanie 5** Podać przykład funkcji wymiernej  $f(x)$  określonej w  $R$  i takiej, że równanie  $\operatorname{tg}(f(x)) = 0$  ma dokładnie dziesięć rozwiązań.

**Zadanie 6** Wyznaczyć wszystkie trójki  $(a, b, c)$  liczb z przedziału  $(0, 1)$ , spełniające równanie  $a(\sin(c) + \cos(c)) + b(\operatorname{tg}(c) + \operatorname{ctg}(c)) = 2ab\sin(2c)$ .

**Zadanie 7** Wyznaczyć wszystkie trójki  $(a, b, c)$  liczb z przedziału  $(0, 1)$ , spełniające równanie  $a(\sin(c) + \cos(c)) + b(\operatorname{tg}(c) + \operatorname{ctg}(c)) = 4AB$ . Liczba  $A$  jest pierwiastkiem kwadratowym z iloczynu  $ab$ , liczba  $B$  jest pierwiastkiem czwartego stopnia z iloczynu  $\sin(c)\cos(c)$ .

**Zadanie 8** Jak najprościej z wykresu wielomianu otrzymać wykres funkcji wymiernej niebędącej wielomianem?

**Zadanie 9** Podać przykład koła o całkowitym promieniu i wielokąta o całkowitych bokach tak, aby te dwie figury miały równe pola.

**Zadanie 10** Niech  $[x]$  i  $\{x\}$  oznaczają odpowiednio cechę i mantysę  $x$ . Funkcja  $f$  odwzorowuje  $R$  w  $R$ . Zbiorem rozwiązań równania  $f(x) = 0$  jest zbiór liczb wymiernych. Wyznaczyć największy możliwy zbiór rozwiązań równania  $f([x]) + f(\{x\}) = 0$ . Dla wyznaczonego zbioru podać odpowiedni przykład funkcji  $f$ .

**Zadanie 11** Niech  $[x]$  i  $\{x\}$  oznaczają odpowiednio cechę i mantysę  $x$ . Funkcja  $f$  odwzorowuje  $R$  w  $R$ . Zbiorem rozwiązań równania  $f(x) = 0$  jest zbiór liczb niewymiernych. Wyznaczyć największy możliwy zbiór rozwiązań równania  $f([x]) + f(\{x\}) = 0$ . Dla wyznaczonego zbioru podać odpowiedni przykład funkcji  $f$ .

**Zadanie 12** Podać przykład różnych liczb dodatnich  $a$  i  $b$  spełniających równanie  $\log(3a - 7b + 10) = \cos(a + b) + \operatorname{tg}(a - b)$ .