

SPIS TREŚCI

Nota autorska	4
<i>GeoGebra</i> analitycznie	5
Optymalizacje z <i>GeoGebra</i>	9
O optymalizacji raz jeszcze	13
Wprowadzanie pojęć z <i>GeoGebra</i>	17
Trygonometria z <i>GeoGebra</i>	21
Trygonometria w zadaniach	25
Geometria na poziomie... ..	29
Równania i nierówności z wartością bezwzględną	33
Geo i nie tylko Gebra	37
Pomaturalne refleksje z <i>GeoGebra</i>	41
Wzajemne położenie okręgów w <i>GeoGebra</i>	45
W krainie funkcji liniowej	49
Długość odcinka w <i>GeoGebra</i>	53

NOTA AUTORSKA

Monika Jankowska – nauczycielka matematyki w gimnazjum, która z powodzeniem w swojej pracy zawodowej wykorzystuje program *GeoGebra*.

GeoGebra analitycznie

Myślę, że nikogo spośród czytelników nie trzeba przekonywać do tego, że program GeoGebra doskonale nadaje się do ilustrowania różnorodnych pojęć matematycznych. Szczególnie może okazać się on pomocny w geometrii analitycznej. W zależności od typu zadania, z jakim przychodzi nam się zmierzyć, możemy wykorzystać program do ilustrowania pojęć, poszukiwania odpowiedzi, weryfikowania hipotez, a także sprawdzania otrzymanych różnymi drogami wyników.

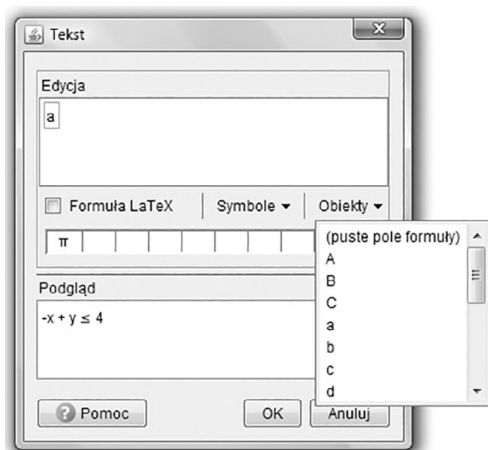
Przykładem aktywności ostatniego typu może być wykorzystanie GeoGebry podczas pracy z zadaniem:

Rozwiąż graficznie układ nierówności oraz znajdź współrzędne wierzchołków figury wyznaczonej przez układ:

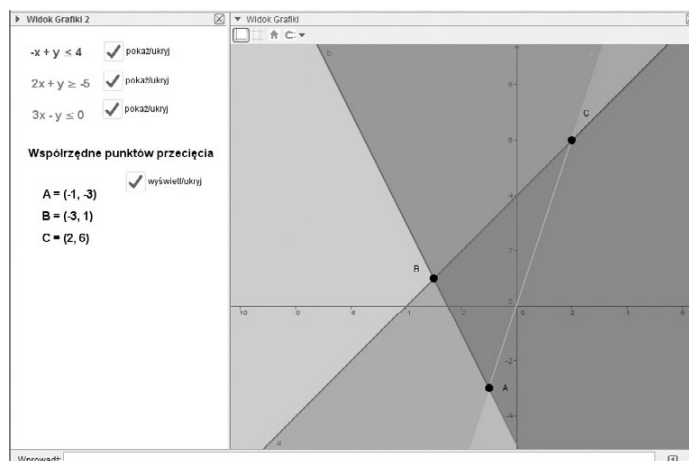
$$\begin{cases} -x + 4 \leq 4 \\ 2x + y \geq -5 \\ 3x - y \leq 0 \end{cases}$$

Aby uzyskać graficzną interpretację poszczególnych nierówności, wystarczy kolejno wpisać w **Polu wprowadzania** (ryc. 1) podane formuły (znak nierówności znajdziemy w tabeli symboli znajdującej się z prawej strony pola). Opcja ta jest dostępna jedynie w nowej wersji programu – co najmniej 4.0. Bardzo łatwo możemy również zaznaczyć punkty przecięcia prostych wyznaczających poszczególne części płaszczyzny. Współrzędne szukanych punktów pojawią się wraz z ich nazwami w widoku algebry. Takiego wykorzystania programu warto nauczyć naszych uczniów po to, aby potrafili oni samodzielnie kontrolować otrzymane wyniki. Może to okazać się szczególnie przydatne wówczas, gdy nie zostały one podane przez autorów podręczników i zbiorów zadań, co w przypadku zadań z geometrii jest dosyć częste. Poza tym, w większości przypadków podana jest jedynie końcowa odpowiedź. Szybkie wygenerowanie ilustracji w programie może więc oszczędzić wielu kłopotów oraz pomóc znaleźć odpowiedzi na pojawiające się pytania. Jeśli jednak chcemy zaprezentować uczniom wyłącznie końcową ilustrację do zadania, powinniśmy wcześniej odpowiednio przygotować plik. Po narysowaniu opisanych wyżej półpłaszczyzn, musimy zadbać oczywiście o sformatowanie obiektów na rysunku poprzez dobór kolorów oraz odpowiednich wielkości i grubości linii. Następnie proponuję uruchomienie **Widoku Grafiki 2**. W oknie, które nam się wówczas pojawi, możemy wyświetlić rozpatrywane nierówności oraz pola wyboru, które posłużą do pokazywania i ukrywania interesujących nas w danym momencie półpłaszczyzn. Nierówności w **Widoku Grafiki 2** uzyskamy poprzez użycie polecenia **Wstaw tekst**, a następnie wskazanie kolejno wybranych obiektów.

Podobnie możemy wyświetlić nazwy i współrzędne szukanych punktów przecięcia. Odpowiedź, której szukamy także nie powinna być widoczna od razu po uruchomieniu pliku (ryc. 2).

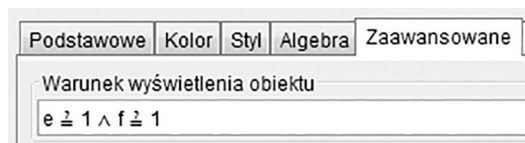


Ryc. 1.



Ryc. 2.

Dobrze byłoby również zadbać o to, aby odpowiednie punkty przecięcia pojawiały się dopiero wraz z półpłaszczyznami, których dotyczą. W tym celu we właściwościach każdego z punktów w zakładce **Zaawansowane** wystarczy określić warunek wyświetlenia obiektu poprzez wpisanie formuły: $e = 1 \wedge f = 1$, która po zatwierdzeniu klawiszem **Enter** będzie wyglądała jak na ryc. 3.



Ryc. 3.

W podanym przykładzie e i f są nazwami przycisków, które warunkują pojawienie się dwóch z rozpatrywanych półpłaszczyzn. Przyjmują one wartość 1 lub 0 w zależności od tego, czy wybrany obiekt jest wyświetlany, czy też nie.

Przykład innego zadania, z którym możemy pracować w podobny sposób to:

Punkty $A = (2, 3)$ i $B = (7, -2)$ leżą na okręgu o środku $S = (0, -4)$. Napisz równanie prostej zawierającej wysokość trójkąta ABS poprowadzoną z wierzchołka S .

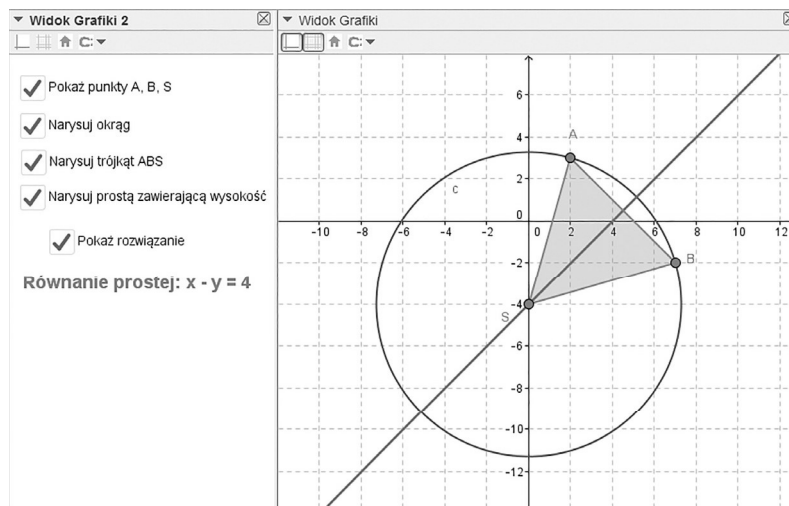
Aby szybko narysować w oknie programu *GeoGebra* punkty o konkretnie podanych współrzędnych, wystarczy wpisywać je kolejno w **Polu wprowadzania**, od razu nadając im nazwy, np. $A = (2, 3)$. Ponieważ punkty te nie powinny być przemieszczane, możemy je unieruchomić poprzez zaznaczenie opcji **Osadź obiekt**, widocznej po wyświetleniu właściwości obiektu.

Po narysowaniu okręgu i trójkąta, a także prostej prostopadłej do odcinka BC możemy utworzyć odpowiednie Pola wyboru w **Widoku grafiki 2** (ryc. 4).

Widok Algebra nie będzie nam już potrzebny. Pracując z uczniami, możemy wyświetlać etapami kolejne kroki na drodze poszukiwania rozwiązania, a następnie sprawdzić jego poprawność. Możliwe jest także dorysowanie dodatkowych, pomocniczych obiektów – na przykład prostej AB oraz wyświetlenie jej równania (ryc. 5).

- Pokaż punkty A, B, S
- Narysuj okrąg
- Narysuj trójkąt ABS
- Narysuj prostą zawierającą wysokość
- Pokaż rozwiązanie

Ryc. 4.



Ryc. 5.

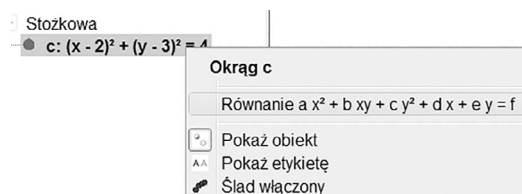
Ostatnim z opisywanych przykładów jest zadanie dotyczące okręgu i prostych stycznych.

Napisz równania prostych stycznych do okręgu $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ przechodzących przez punkt $K = (0, -1)$.

Rysowanie okręgów w *GeoGebra* jest równie proste jak w przypadku pozostałych figur geometrycznych. Wystarczy wpisać w **Polu wprowadzania** formułę:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0.$$

W **Widoku Algebry** pojawi się od razu równanie okręgu, ale będzie ono podane w innej postaci. Możemy jednak wykorzystać je do przypomnienia uczniom jak przekształcamy równania, a także, w jaki sposób możemy wyznaczyć środek okręgu. Łatwo możemy zmienić formę wyświetlania równania, klikając na nie prawym klawiszem myszy i wybierając interesującą nas postać równania (ryc. 6).



Ryc. 6.

Warto wcześniej zaznaczyć także punkt K dany w zadaniu oraz środek okręgu $S = (2, 3)$. Dzięki wbudowanemu w programie narzędziu styczne El możemy szybko narysować obydwie szukane proste oraz wyświetlić ich równania (ryc. 7).

Oczywiście możemy pozostawić tak przygotowaną ilustrację lub też wprowadzić przyciski – analogicznie jak w poprzednim zadaniu – aby krok po kroku pokazywać uczniom etapy poszukiwania rozwiązania. Wskazówką dla uczniów, która pomoże im znaleźć rozwiązanie zadania